

الدوران

I- تعريف الدوران

1- تعريف

لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:

$M = O$ اذا كانت $M' = O$ -

$$M \neq O \text{ اذا كان } \begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overline{OM}; \overline{OM'} \right) \equiv \alpha \quad [2\pi]^- \end{cases}$$

*- نرسم للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O; \alpha)$ أو بالرمز r

*- النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M) = M'$

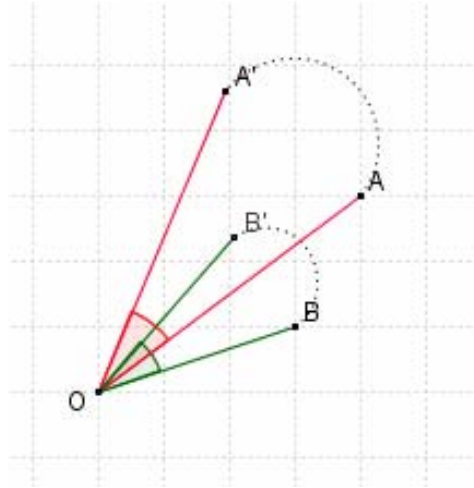
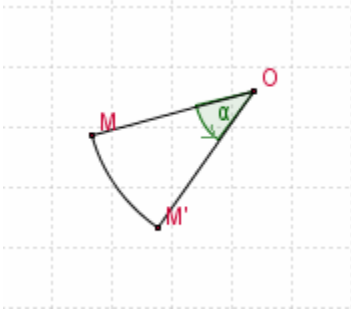
نقول كذلك أن الدوران r يحول M إلى M'

مثال

لتكن O و A و B ثلاث نقط و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$

أنشئ A' و B' صورتي A و B على التوالي بالدوران r

الجواب



2 - استنتاجات

أ) المثلث المتساوي الساقين

- ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A يعني أن الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\widehat{AB}; \widehat{AC} \right)$ يحول B

إلى C

- إذا كان ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث $[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \left(\widehat{AB}; \widehat{AC} \right)$ فان الدوران

الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C

- إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} \left(\widehat{AB}; \widehat{AC} \right)$ فان الدوران الذي مركزه A و

زاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

ب) الدوران الذي زاويته منعدمة

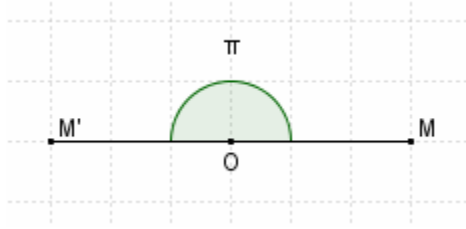
ليكن $r(O; \alpha)$ دورانا

- إذا كان $[2\pi] \equiv \alpha \equiv 0$ فان $r(M) = M$ في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى

جميع نقط المستوى صامدة

- إذا كان $[2\pi] \equiv \alpha \neq 0$ فان النقطة الوحيد الصامدة بالدوران r هي مركزه O

حيث $r(O; \pi) = S_O$ التماثل المركزي الذي مركزه O



3- الدوران العكسي

ليكن دورانا $r(O; \alpha)$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overline{OM}; \overline{OM'}) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (\overline{OM'}; \overline{OM}) \equiv -\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow r'(M') = M \quad / \quad r' = r(O; -\alpha)$$

الدوران $r(O; -\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O; \alpha)$ نرسم له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r^{-1}(M') = M \\ r^{-1}(O) = O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(M) = M' \\ r(O) = O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصة

كل دوران $r(O; \alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى

الدوران $r(O; -\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O; \alpha)$ نرسم له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقية

1- ليكن $ABCD$ مربعاً

حدد زاويتي الدورانيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

$$2- \text{ ليكن } ABC \text{ مثلث متساوي الأضلاع حيث } (\widehat{CA; CB}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

II- خاصيات الدوران

1- خاصة أساسية (الحفاظ على المسافة)

ليكن دورانا $r(O; \alpha)$ و A و B نقطتين

$$r(B) = B' \quad ; \quad r(A) = A'$$

$$\text{لنقارن } AB = A'B'$$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos[\widehat{AOB}]$$

$$AB'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB' \cdot \cos[\widehat{A'OB'}]$$

$$\begin{cases} OB = OB' \\ (\overline{OB}; \overline{OB'}) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases} \quad \begin{cases} OA = OA' \\ (\overline{OA}; \overline{OA'}) \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases} \quad \text{فان } r(B) = B' \quad ; \quad r(A) = A'$$

و لدينا من جهة أخرى

$$\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}\right) + \left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB'}\right) + \left(\overrightarrow{OB'}; \overrightarrow{OB}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \alpha + \left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB'}\right) - \alpha \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB'}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left[\widehat{AOB}\right] = \left[\widehat{A'OB'}\right] \quad \text{ومنه}$$

$$A'B'^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \left[\widehat{AOB}\right] \quad \text{و بالتالي}$$

$$A'B' = AB \quad \text{اذن} \quad A'B'^2 = AB^2 \quad \text{ومنه}$$

خاصية

ليكن r دوراناً و A و B نقطتين من المستوى
إذا كان $r(A) = A'$; $r(B) = B'$ فان $A'B' = AB$
نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن ABC مثلثاً. نعتبر M و N نقطتين خارج المثلث بحيث MAB و NAC مثلثان متساوي الأضلاع
قارن MC و NB

-III- الدوران و استقامة النقط

(أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' و B' صورتا A و B بدوران r

لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صورتها بالدوران r

1- بين أن $M' \in [A'B']$

2- بين إذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

الجواب

لدينا A' و B' و M' صور A و B و M بدوران r ومنه $MA = M'A'$ و $MB = M'B'$ و $AB = A'B'$

1- $M \in [AB]$ تكافئ $MA + MB = AB$

تكافئ $M'A' + M'B' = A'B'$

تكافئ $M' \in [A'B']$

2- ليكن $\lambda \in [0;1]$ و $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

ومنه $M \in [AB]$ و $\frac{AM}{AB} = \lambda$

و بالتالي $M' \in [A'B']$ و $\frac{A'M'}{A'B'} = \lambda$

اذن $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $[AB]$ قطعة و A' و B' صورتا A و B بدوران r

صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$

إذا كان $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ حيث $0 \leq \lambda \leq 1$ فان $\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M) = M'$

ب- صورة مستقيم

لتكن A' و B' صورتا النقطتين المختلفتين A و B بدوران r

أ- بين أن $r([AB]) = [A'B']$

ب- بين أن $r((AB)) = (A'B')$

خاصية

لتكن A' و B' صورتين نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r
- صورة نصف المستقيم $[AB]$ هو نصف المستقيم $[A'B']$
- صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$
- إذا كان $\overline{AM} = \lambda \overline{AB}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن $\overline{A'M'} = \lambda \overline{A'B'}$ حيث $r(M) = M'$

ج- المرجح و الدوران

A' و B' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$
بين أن G' مرجح $(A'; \alpha)$ و $(B'; \beta)$

الجواب

$$\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB} \text{ ومنه } (B; \beta) \text{ و } (A; \alpha) \text{ مرجح } G$$

$$\text{و حيث الدوران يحافظ على معامل استقامية فان } \overline{A'G'} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{A'B'}$$

إذن G' مرجح $(A'; \alpha)$ و $(B'; \beta)$

خاصية

A' و B' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي
إذا كان G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ فإن G' مرجح $(A'; \alpha)$ و $(B'; \beta)$
الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

ملاحظة: الخاصية تبقى صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين

نتيجة

A' و B' و I' صور النقط A و B و I بدوران r على التوالي
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' منتصف $[A'B']$
الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{حيث } \overline{CD} = \lambda \overline{AB}$$

$$\text{لنبين أن } \overline{C'D'} = \lambda \overline{A'B'}$$

لنعتبر النقطة E حيث $\overline{CD} = \overline{AE}$ و E' صورة E بالدوران r

و منه $\overline{AE} = \lambda \overline{AB}$ و بالتالي $\overline{A'E'} = \lambda \overline{A'B'}$ لان المرجح يحافظ على معامل استقامية النقط

$$\overline{CD} = \overline{AE} \text{ تكافئ } [AD] \text{ و } [AE] \text{ لهما نفس المنتصف}$$

و حيث أن الدوران يحافظ على المنتصف فإن $[A'D']$ و $[A'E']$ لهما نفس المنتصف

$$\text{ومنه } \overline{C'D'} = \overline{A'E'}$$

$$\text{اذن } \overline{C'D'} = \lambda \overline{A'B'}$$

خاصية

لتكن A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{إذا كان } \overline{CD} = \lambda \overline{AB} \text{ فإن } \overline{C'D'} = \lambda \overline{A'B'}$$

نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعاً

نشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE متساوي الأضلاع

نعتبر الدوران $r = r\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$ و G نقطة حيث $r(G) = D$

بين أن النقط D و E و F مستقيمة

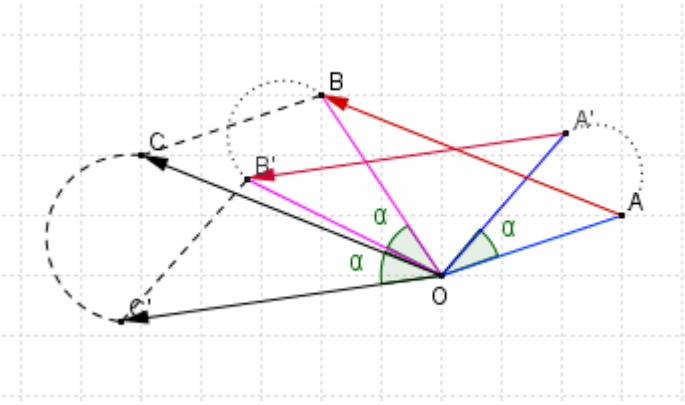
3- الدوران و الزوايا

أ) خاصة أساسية

لتكن A' و B' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي .

لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C) = C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{A'B'}$



$$\text{و بالتالي } [2\pi] \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OC'}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$$

$$\text{وحيث أن } [2\pi] \quad (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OC'}) \equiv \alpha \quad \text{فان } [2\pi] \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha$$

خاصة

ليكن r دوراناً زاويته α

إذا كان A' و B' صورتي A و B بالدوران r فان $[2\pi] \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha$

ب- نتيجة

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) + (\overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \alpha + (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) - \alpha \quad [2\pi]$$

$$\text{إذن } [2\pi] \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'})$$

لتكن A' و B' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

نعبّر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قياس الزوايا $[2\pi] \quad (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'})$

تمرين

ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $[AB]$

الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمة حيث $r(M) = M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصة

صورة دائرة $C(\Omega; R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega'; R)$ حيث $r(\Omega) = \Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعاً و (C) دائرة مارة من A و C . لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ = DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $(\frac{\pi}{2})$)

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$

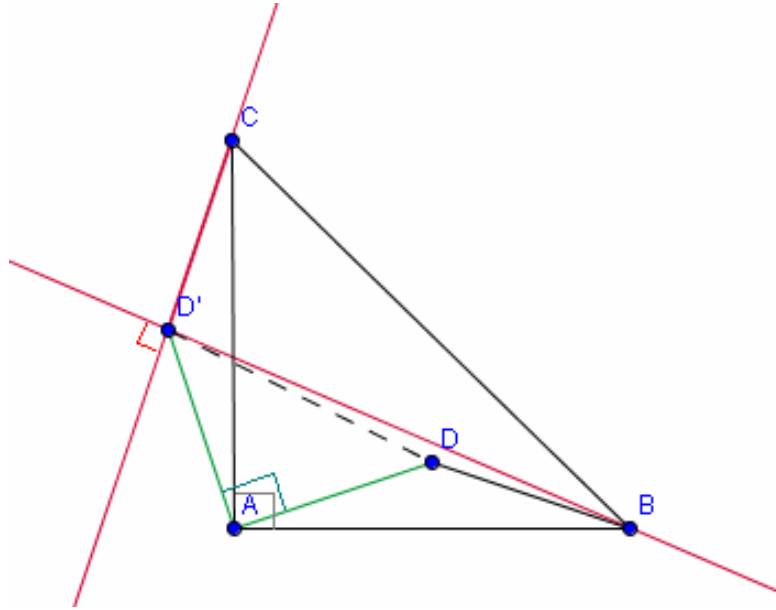
و D نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ D' صورة D بالدوران r

2- بين أن $BD = CD'$; $(BD) \perp (CD')$

الحل

1- ننشئ D' صورة D بالدوران r



2- نبين أن $BD = CD'$; $(BD) \perp (CD')$

لدينا $[2\pi]$ $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B) = C$

و حيث $r(D) = D'$ فان $BD = CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B) = C$ و $r(D) = D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $(\overline{BD}; \overline{CD'}) = \frac{\pi}{2}$

إذن $(BD) \perp (CD')$

تمرين 2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $(\overline{BA}; \overline{BC})$ زاوية

غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و E و F نقطتين حيث $\overline{AE} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ و $\overline{BF} = \frac{3}{4}\overline{BC}$.

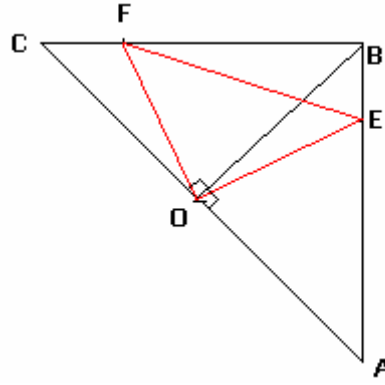
ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ الشكل

2- حدد صورتي A و B بالدوران r

3- نضع $r(E) = E'$ بين أن $E' = F$ استنتج طبيعة المثلث OEF

الحل
1- الشكل



2- نحدد صورتنا A و B بالدوران r

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B و O منتصف $[AC]$ ومنه $(OB) \perp (AC)$ و $OA = OB = OC$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ و $OA = OB$ و منه $r(A) = B$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ و $OC = OB$ و منه $r(B) = C$

1- نبين أن $E' = F$ نستنتج طبيعة المثلث OEF

$r(E) = E'$ و $r(A) = B$ و $r(B) = C$ و $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و منه $\overrightarrow{BE'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فإن $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE'}$ إذن $E' = F$

ومنه $r(E) = F$ و حيث r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فإن OEF مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تمرين 3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\rho]$ $\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right) \equiv \alpha$ و الدوران الذي

مركزه B و زاويته α

1- أنشئ E و F حيث $r(C) = F$; $r(A) = E$

2- بين أن $(EF) \perp (BC)$

3- لتكن $\{I\} = (AC) \cap (EF)$ و $r(I) = J$ و $\{K\} = (AB) \cap (IJ)$

أ- بين أن النقط E و F و J مستقيمة

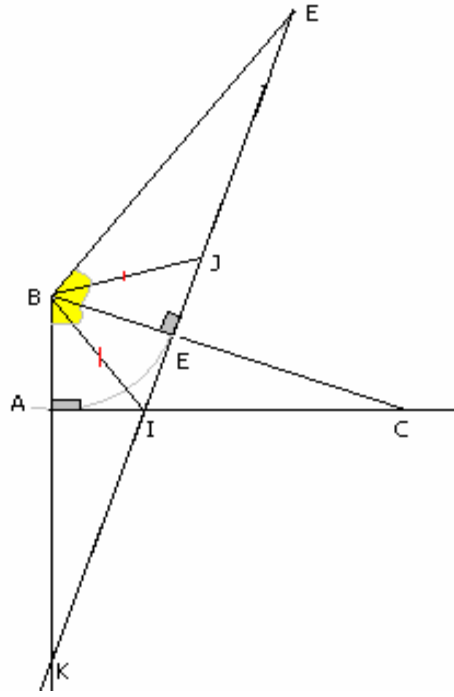
ب- بين أن E منتصف $[IJ]$

4- لتكن $\{K\} = (AB) \cap (IJ)$.

بين أن $r(K) = C$

الحل

1- ننشئ E و F حيث $r(C) = F$; $r(A) = E$



2- بين أن $(EF) \perp (BC)$

بما أن $r(C) = F$; $r(A) = E$ و $r(B) = B$ فإن $(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv (\overline{EF}; \overline{EB})$

وحيث أن $[2\pi] \equiv (\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}$ فإن $(\overline{EF}; \overline{EB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ ومنه $(EF) \perp (EB)$

لدينا $r(A) = E$ و $r(B) = B$ ومنه $[2\pi] \equiv (\overline{BA}; \overline{BE}) \equiv \alpha \equiv (\overline{BA}; \overline{BC})$ و بالتالي $(BC) = (BE)$

إذن $(EF) \perp (BC)$

3- أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C) = F$; $r(A) = E$ و $r(I) = J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I) = J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ) \perp (EB)$ لأن $(IJ) = (EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

4- نبين أن $r(K) = C$

$(AB) \cap (IJ) = \{K\}$

لدينا $[2\pi] \equiv (\overline{BK}; \overline{BC}) \equiv \alpha \equiv (\overline{BC}; \overline{BF})$ ومنه (BC) منصف (\widehat{KBF}) وحيث أن $(EF) \perp (BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF = BK$

وحيث أن $r(C) = F$ فان $BC = BF$ و بالتالي $BC = BK$

إذن لدينا $[2\pi] \equiv (\overline{BK}; \overline{BC}) \equiv \alpha$ و $BC = BK$ ومنه $r(K) = C$